Análise Matemática I

1º Semestre de 2004/05
LEAero, LEBiom, LEFT e LMAC
Exercícios para as aulas práticas

I Elementos de Lógica e Teoria dos Conjuntos (20-24/9/2004)

1. (Exercício 1.2 de [3]) Prove que, quaisquer que sejam as proposições p, q e r, são verdadeiras as proposições:

   a) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$,

   b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$,

   c) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$,

   d) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$,

   e) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$,

   f) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.

2. (Exercício 1.3 de [3]) Indique quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas supondo que as variáveis intervenientes têm por domínio a) o conjunto dos reais e b) o conjunto dos naturais não nulos. Negue as proposições usando as segundas Leis de De Morgan.

   a) $\forall_x \; x^2 + 1 > 1$,

   b) $\forall_x \; x > 2 \Rightarrow x > 1$,

   c) $\forall_x \exists_y \; y = x^2$,

   d) $\exists_y \forall_x \; y = x^2$,

   e) $\forall_{x,y} \exists_z \; x = yz$,

   f) $\exists_{x,y} \; (x - y)^2 = x^2 - y^2$,

   g) $\forall_{x,y} \; (x - y)^2 = x^2 - y^2$.

3. (Exercício 1.4 de [3]) Verifique que, no conjunto dos reais, as condições $\exists_x \, y = x^2$ e $y \geq 0$ são (formalmente) equivalentes. Observe bem que o quantificador existencial em x converteu a condição com duas variáveis, $y = x^2$, numa condição equivalente a $y \geq 0$, que tem apenas uma variável. A variável y diz-se variável não quantificada ou livre. Na mesma ordem de ideias, verifique as equivalências formais:

   a) $\exists_y \; x = 10^y \;\Leftrightarrow\; x > 0$, em $\mathbb{R}$,

   b) $\forall_x \; y \leq x \;\Leftrightarrow\; y = 1$, em $\mathbb{N} \setminus \{0\}$,

   c) $\forall_x \; y < x \;\Leftrightarrow\; y = y + 1$, em $\mathbb{N} \setminus \{0\}$,

   d) $\exists_z \; x = y + z \;\Leftrightarrow\; x > y$, em $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

4. (Exercício 2.1.4 de [3]) Indique quais das proposições seguintes são verdadeiras:

   a) $\emptyset \subset \emptyset$,

b) $1 \in \{1\}$,

c) $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$,

d) $1 \in \{2\}$,

e) $\{1\} \subset \{1, \{2, 3\}\}$,

f) $\emptyset = \{x \in \mathbb{N} : x = x + 1\}$,

g) $1 \in \mathbb{R}$,

h) $1 \in \{\mathbb{R}\}$.

5. (Exercício 2.1.5 de [3]) Quantos elementos têm os conjuntos seguintes:

$$\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\{\emptyset\}\}?$$

Indique algumas proposições verdadeiras que exprimam relações de inclusão e relações de pertença entre os conjuntos dados.

6. (Exercício 2.1.6 de [3]) Indique dois conjuntos A e B para os quais seja verdadeira a proposição $(A \in B) \wedge (A \subset B)$. Seja agora A um conjunto arbitrário. Construa um conjunto B para o qual a proposição anterior seja verdadeira.

7. Prove por indução que $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

8. (Exercício 2.1.7 de [3]) Sendo A um conjunto arbitrário, chama-se conjunto das partes de A, e designa-se por $P(A)$, o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A. Por exemplo, se $A = \{1, 2\}$ é $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

   a) Quantos elementos têm os conjuntos $P(\emptyset)$ e $P(P(\emptyset))$?

   b) Verifique que $x \in A \;\Leftrightarrow\; \{x\} \in P(A)$.

   c) Prove por indução que, sendo A um conjunto com n elementos, o número de elementos de $P(A)$ é 2^n.

II Teoria dos Conjuntos, Indução Matemática (27/9-1/10/2004)

1. (Exercícios 2.1.9 e 2.1.10 de [3]) Interprete geometricamente os seguintes conjuntos:

   a) $\{x : |x| < 1\}$,

   b) $\{x : |x| < 0\}$,

   c) $\{x : |x - a| < \epsilon\}$, onde $\epsilon > 0$,

   d) $\{x : |x - a| > L\}$, onde $L > 0$,

   e) $\{x : |x| > 0\}$,

   f) $\{x : |x - 1| = |x - 5|\}$,

   g) $\{x : |x - 1| \geq |x|\}$,

   h) $\{x : |x - a| = b^2\}$,

   i) $\{x : |2x - 1| \geq |4 - x|\}$

j) $\{x : 1 \leq (x-1)^2 \leq 4\}$,

k) $\{x : (x-a)(x-b) < 0\}$, onde $a < b$,

l) $\{x : x^3 > x\}$,

m) $\{x : x - 1 \leq 6/x\}$.

2. Mostre que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, se tem $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

3. *(Exercício 2.1.12 de [3]) Um conjunto X e duas operações, designadas (por exemplo) pelos símbolos $\cup$ e $\cap$, constituem uma *álgebra de Boole* sse forem verificados os seguintes axiomas: $\forall_{a,b,c \in X}$,

   i) $a \cup b \in X \wedge a \cap b \in X$,

   ii) $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$, $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$,

   iii) $a \cup b = b \cup a$, $a \cap b = b \cap a$,

   iv) $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$, $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$,

   v) existem dois elementos, que designaremos por 0 e 1, tais que $a \cup 0 = a$ e $a \cap 1 = a$,

   vi) $\exists_{a' \in X}$ $a \cup a' = 1 \wedge a \cap a' = 0$.

   Prove que, sendo A um conjunto arbitrário, o conjunto $X = P(A)$ e as operações de reunião e intersecção de conjuntos constituem uma álgebra de Boole. Quais são os elementos 0 e 1 dessa álgebra?

4. *(p. 34 de [3]) Seja A um conjunto não vazio. Uma relação G, no conjunto A, diz-se uma relação de equivalência sse

   i) $\forall_{x \in A}$ xGx (reflexividade),

   ii) $\forall_{x,y \in A}$ $xGy \Rightarrow yGx$ (simetria),

   iii) $\forall_{x,y\ z \in A}$ $(xGy \wedge yGz) \Rightarrow xGz$ (transitividade).

   São relações de equivalência, por exemplo, a relação de igualdade num dado conjunto, a relação de paralelismo no conjunto das rectas do espaço, a relação de semelhança de triângulos, a relação de equipotência entre subconjuntos de um dado conjunto. Não são relações de equivalência a relação de perpendicularidade de rectas do espaço, a relação de divisor entre números naturais, de contido entre conjuntos, e a de maior entre números reais.

   Fixada uma relação de equivalência G num conjunto A, diz-se que dois elementos a e b de A são equivalentes segundo G sse aGb. Sendo $c \in A$, chama-se classe de equivalência de c, e designa-se por $[c]$, o conjunto de todos os elementos de A que são equivalentes a c: $x \in [c] \Leftrightarrow xGc$. Mostre que:

   a) $a \in [a]$,

   b) $aGb \Leftrightarrow [a] = [b]$,

   c) $(\sim (aGb)) \Leftrightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$.

5. (Exercícios 1.17, 1.18 e 1.19 de [5]) Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

a) $(n!)^2 > 2^n n^2$, para todo o natural $n \geq 4$,

b) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, para todo o natural $n \geq 1$,

c) $n! \geq 2^{n-1}$, para todo o natural $n \geq 1$,

d) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo o natural $n \geq 1$.

6. (Exercício 1.20 de [5]) Demonstre a desigualdade de Bernoulli: Sendo $a > -1$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

III Indução Matemática, Axiomas dos Números Reais (4-8/10/2004)

1. Considere a sucessão (u_n) dos números de Fibonacci:

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_1 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \text{ para } n \in \mathbb{N}_1. \end{cases}$$

Prove por indução que, para $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

2. *(Exercício 1.21 de [5]) Demonstre, pelo princípio de indução matemática, o binómio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p, \quad \forall_n \in \mathbb{N}, \quad \forall_{a,b} \in \mathbb{R}.$$

Recorde que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, e que desta igualdade se tira imediatamente que $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}$.

3. (Exercício I.1 de [4]) Deduza a partir dos axiomas dos números reais:

a) $-0 = 0$, $1^{-1} = 1$,

b) $-(-x) = x$, $\forall_{x \neq 0}\ (x^{-1})^{-1} = x$,

c) $x(-y) = (-x)y = -(xy)$, $(-x)(-y) = xy$,

d) $(xy = xz \wedge x \neq 0) \Rightarrow (y = z)$,

e) $\forall_x \forall_{y \neq 0} \exists^1_z\ x = yz$,

f) $\forall_{x,u} \forall_{y,v \neq 0}\ \frac{x}{y} \cdot \frac{u}{v} = \frac{xu}{yv}$,

4. *Verifique que $(\mathbb{Z}_3, +, \times)$ é um corpo, onde $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$, $+$ é a adição módulo 3, e $\times$ é a multiplicação módulo 3.

5. *(p. 39 de [3]) Diz-se que G é uma relação de ordem no conjunto S sse satisfaz as seguintes propriedades:

a) $\forall_{x \in S}\ \sim (xGx)$ (propriedade anti-reflexiva),

b) $\forall_{x,y \in S}\ (xGy) \Rightarrow [\sim (yGx)]$ (propriedade anti-simétrica),

c) $\forall_{x,y,z\in S}\ [(xGy)\wedge(yGz)]\Rightarrow(xGz)$ (propriedade transitiva).

Se, além destas três, G satisfizer a propriedade da tricotomia,

$$\forall_{x,y\in S}\ x=y\vee(xGy)\vee(yGx),$$

diz-se que G é uma relação de ordem total. Verifique que a relação de menor no conjunto dos números reais é uma relação de ordem total, e que a relação inclusão estrita é uma relação de ordem (em geral não total) no conjunto das partes de um determinado conjunto A.

6. (Exercício I.2 de [4]) Deduza as propriedades:

   a) $x+z<y+z\Rightarrow x<y$,

   b) $x>0\Leftrightarrow x^{-1}>0$,

   c) $x>1\Leftrightarrow x^{-1}\in]0,1[$.

7. Verifique que $\forall_{a>0}\ a+\frac{1}{a}\geq 2$.

8. Verifique que $\forall_{0<a<b}\ a<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<b$.

9. (Exercício I.3 de [4]) Prove que, se x é um racional diferente de zero e y um irracional, $x+y$, $x-y$, xy e y/x são irracionais; mostre também que, sendo x e y irracionais, a sua soma, diferença, produto e quociente podem ser ou não ser irracionais.

10. (Exercício I.8 de [4]) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, majorado e não vazio, e seja m um majorante de A, distinto do supremo desse conjunto. Mostre que existe $\epsilon>0$ tal que $V_\epsilon(m)\cap A=\emptyset$.

11. (Exercício I.9 de [4]) Sendo A um subconjunto majorado e não vazio de $\mathbb{R}$ e $\alpha=\sup A$, prove que, para qualquer $\epsilon>0$, o conjunto $V_\epsilon(\alpha)\cap A$ é não vazio. Na hipótese de α não pertencer a A, o conjunto $V_\epsilon(\alpha)\cap A$ pode ser finito? Justifique.

12. (Exercício I.5 de [4]) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $A\subset B$ e suponha que A é não vazio e B é majorado. Justifique que existem os supremos de A e B e prove que se verifica $\sup A\leq\sup B$.

13. *(Página 56 de [4]) Seja X um conjunto e $P(X)$ o conjunto das partes de X. Porve que $\#X<\#P(X)$. Sugestão: Suponha que existia uma bijecção φ de X em $P(X)$. Designe por M o conjunto definido por $M=\{x\in X: x\notin\varphi(x)\}$ e por m o elemento de X tal que $\varphi(m)=M$. Prove que não se pode ter nem $m\in M$ nem $m\notin M$.

14. *(Exercício I.7 de [4]) Prove que o conjunto de todas as aplicações de $\{0,1\}$ em $\mathbb{N}$ tem a potência do numerável e que o conjunto de todas as aplicações de $\mathbb{N}$ em $\{0,1\}$ tem a potência do contínuo. Prove ainda que o conjunto de todas as aplicações de um intervalo $[a,b]$ (com $a<b$) em $\{0,1\}$ tem potência superior à do contínuo.

IV Sucessões (11-15/10/2004)

1. (Exercício II.1 de [4]) Indique quais são majoradas, minoradas, limitadas, de entre as sucessões definidas do modo seguinte:

   a) $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$.

   b) $u_n = (-1)^n n^2$.

   c) $u_n = n^{(-1)^n}$.

   d) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

   e) $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$.

   f) $u_1 = -1$, $u_{n+1} = -2u_n$.

2. (Exercício II.2 de [4]) Baseando-se directamente na definição de limite mostre que

   a) $\frac{2n-1}{n+1} \to 2$.

   b) $\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \to 1$.

V Sucessões (18-22/10/2004)

1. (Exercício II.5 de [4]) Determine, se existirem, os limites das sucessões que têm por termo de ordem n:

   a) $\frac{2n+3}{3n-1}$.

   b) $\frac{n^2-1}{n^4+3}$.

   c) $\frac{2^n+1}{2^{n+1}-1}$.

   d) $\frac{n^3+1}{n^2+2n-1}$.

   e) $\frac{(-1)^n n^3+1}{n^2+2}$.

   f) $\frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)}$.

   g) $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+q)}$, onde $p,q \in \mathbb{N}_1$.

   h) $\frac{n^p}{n!}$, onde $p \in \mathbb{N}_1$.

   i) $\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$.

   j) $\frac{a^n b^n}{a^n+b^n}$, onde $a,b \in \mathbb{R}^+$.

VI Sucessões (25-29/10/2004)

1. (Exercício II.1g) de [4]) Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

   a) Prove por indução que $1 \leq u_n < 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

   b) Verifique que $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+\sqrt{2+u_n}}$ e mostre que (u_n) é crescente.

   c) Justifique que (u_n) é convergente.

   d) Aplicando limites a ambos os membros da expressão de recorrência, determine o limite de (u_n).

2. (Exercício 8.13 de [2]) Seja (a_n) a sucessão definida por recorrência por $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}$.

   a) Verifique que $a_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{(3-\sqrt{3})(a_n-\sqrt{3})}{3+a_n}$. Prove por indução que $a_n > \sqrt{3}$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

   b) Prove que (a_n) é decrescente.

   c) Justifique que (a_n) é convergente.

   d) Aplicando limites a ambos os membros da expressão de recorrência, determine o limite de (a_n).

3. (Página 96 de [4]) Prove que se $|c| < 1$, então $c^n \to 0$.

   Sugestão: Use a desigualdade de Bernoulli: $(1+k)^n \geq 1+nk$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $k > -1$.

4. *(Página 101 de [4]) Seja $p \in \mathbb{N}_1$ e $u_n \geq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$. Prove que se $u_n \to a$, então $\sqrt[p]{u_n} \to \sqrt[p]{a}$.

   Sugestão: Para $a > 0$, use

$$\begin{aligned} |\sqrt[p]{u_n} - \sqrt[p]{a}| &= \frac{|u_n - a|}{(\sqrt[p]{u_n})^{p-1} + \sqrt[p]{a}(\sqrt[p]{u_n})^{p-2} + \ldots + (\sqrt[p]{a})^{p-2}\sqrt[p]{u_n} + (\sqrt[p]{a})^{p-1}} \\ &\leq \frac{|u_n - a|}{(\sqrt[p]{a})^{p-1}}. \end{aligned}$$

5. (Página 102 de [4]) Prove que, para todo $a > 0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

   Sugestão: Use a desigualdade de Bernoulli: $(1+k_n)^n \geq 1+nk_n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e qualquer sucessão (k_n) cujos termos sejam maiores do que -1. Suponha em primeiro lugar que $a > 1$ e defina $k_n := \sqrt[n]{a} - 1$.

6. *(Página 135 de [4]) Seja u uma sucessão de termos positivos. Prove que se $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge em $\overline{\mathbb{R}}$, então $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)$ também converge, e para o mesmo limite.

7. Mostre que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

8. Seja $p > 0$ e $a > 1$. Mostre que

a) $\lim \frac{n^p}{a^n} = 0$. Sugestão: $\lim \sqrt[n]{\frac{n^p}{a^n}} = \frac{1}{a}$.

b) $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$. Sugestão: Se $n > \mathcal{C}(a)$, então $\frac{a^n}{n!} \leq \frac{a}{n} \times a^{\mathcal{C}(a)}$, onde $\mathcal{C}(a)$ designa a característica de a.

c) $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$. Sugestão: $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$.

9. *(Página 132 de [4]) Seja u uma sucessão convergente em $\overline{\mathbb{R}}$, e seja v_n a média dos n primeiros termos da sucessão u: $v_n = \frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}$. Prove que nestas condições v também é convergente e $\lim v = \lim u$.

VII Sucessões (1-5/11/2004)

1. (Exercício II.5 de [4]) Determine, se existirem, os limites das sucessões que têm por termo de ordem n:

   a) $\frac{2^n}{n^2}$.

   b) $\sqrt[n]{\frac{n^2+n-1}{n+3}}$.

   c) $\sqrt[n]{2^n+1}$.

   d) $\sqrt[n]{n!}$.

   e) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$.

   f) $\left(1-\frac{1}{n!}\right)^{n!}$.

   g) $\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2}$.

2. Calcule, se existirem,

   a) $\lim_{n\to\infty} \left(2-\frac{1}{n}\right)^n$.

   b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{15^n}$.

3. (Exercício II.3 de [4]) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ com supremo s. Prove que existe uma sucessão (x_n), de termos em A, convergente para s. Prove ainda que, se A não tem máximo, a sucessão (x_n) pode ser escolhida por forma que seja estritamente crescente.

4. (Exercício II.4 de [4]) Sendo (x_n) uma sucessão monótona e (y_n) uma sucessão limitada verificando $|x_n - y_n| < 1/n$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, prove em primeiro lugar que (x_n) é limitada e depois que as duas sucessões são convergentes para o mesmo limite.

5. (Página 119 de [4]) Seja (u_n) limitada e $\epsilon > 0$. Prove que é finito o conjunto das ordens n para as quais $u_n > \overline{\lim}\, u_n + \epsilon$.

6. Seja (x_n) uma sucessão tal que $|x_n|^2 \leq 65|x_n| + 99$. Prove que (x_n) tem uma subsucessão convergente.

7. Considere a sucessão (x_n) obtida por truncatura da dízima que representa π com n casas decimais. Considere também a sucessão (y_n), em que y_n se obtém de x_n por uma troca da ordem dos seus dígitos:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 3.1 & y_1 = 1.3 \\ x_2 = 3.14 & y_2 = 4.13 \\ x_3 = 3.141 & y_3 = 1.413 \\ x_4 = 3.1415 & y_4 = 5.1413 \\ x_5 = 3.14159 & y_5 = 9.51413 \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

   (a) Diga se o conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}_1\}$ tem ínfimo, supremo, mínimo e máximo.

   (b) A sucessão (x_n) converge? Qual o seu limite? Justifique.

   (c) Determine $\liminf x_n$ e $\limsup x_n$.

   (d) Prove que (y_n) tem pelo menos dois sublimites.

8. *(Exercício II.11 de [4]) Dê um exemplo de uma sucessão cujo conjunto de sublimites seja o conjunto:

   a) $\mathbb{R}$.

   Poderá haver uma sucessão cujo conjunto de sublimites seja $\mathbb{Q}$? Justifique.

VIII Séries (8-12/11/2004)

1. (Exercício II.12 de [4]) Calcule a soma das séries:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$,
   b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-(5n+1)}$,
   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$
   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

2. (Exercício II.13 de [4]) Prove que qualquer número representado por uma dízima periódica é racional.

   Sugestão: $0.2151515\ldots = \frac{2}{10} + \frac{15}{1000}\left(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \ldots\right)$.

3. (Exercício II.14 de [4]) Determine a natureza das séries:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+4}$,
   b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$,
   c) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,
   d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{e^n}$,
   e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^2+2^n}$,
   f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$,
   g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$,

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{1000}}{(1.001)^n}$,

j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$,

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n+1}\sqrt[4]{n+2}}$,

l) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n+1)}{3.6.9...(3n+3)}$,

m) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(2n)!]^2}{n!(3n)!}$,

n) $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^3$.

IX Séries (15-19/11/2004)

1. (Exercício II.17 de [4]) Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes as séries:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

   b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$,

   c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+2}$,

   d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$.

2. (Exercício II.18 de [4]) Determine os intervalos de convergência das séries:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)!}{2.4.6...(2n)} x^{n+1}$,

   b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$,

   c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$,

   d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n+1}$,

   e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+a)^n}{a^{n+1}}$, onde $a \neq 0$,

   f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+1)^{2n}}{n^2+1}$.

   g) $\sum_{n=0}^{\infty}[3+(-1)^n]^n x^n$.

3. (Página 247 de [4]) Esboce o gráfico da função exponencial.

4. (Página 268 de [4]) Esboce os gráficos das funções seno hiperbólico, coseno hiperbólico e tangente hiperbólica.

5. (Página 216 e 250 de [4]) Prove a fórmula fundamental da trigonometria.

X Continuidade e Limite (22-26/11/2004)

1. (Exercício 3.26 de [5]) Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} D(x),$$

onde D designa a função de Dirichlet.

   a) Indique o contradomínio de f. A função é majorada? E minorada?

   b) Quais são os limites $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, caso existam.

   c) Em que pontos é f contínua.

2. (Página 301 de [4]) Defina os limites laterais de f no ponto a e os limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores distintos de a.

3. (Páginas 265 e 266 de [4]) Defina as funções trigonométricas inversas arcsin, arccos e arctan e esboce os seus gráficos.

4. (Exercício 3.27 de [5]) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em no ponto 1, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -1, \\ \arcsin x & \text{se } -1 < x < 1, \\ K \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

   a) Determine K.

   b) Estude f do ponto de vista da continuidade.

   c) Indique o contradomínio de f e se tem supremo, ínfimo, máximo, mínimo.

   d) Quais são os limites $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, caso existam.

5. *(Página 282 de [4]) Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências com raio de convergência $r \neq 0$. Prove que $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ é contínua em $]-r, r[$.

6. (Exercício 4.2.6 de [1]) Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $c \in A$. Sejam f, $g : A \to \mathbb{R}$, com f limitada e $\lim_{x\to c} g(x) = 0$. Mostre que $\lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = 0$.

7. (Exercício 4.2.7 de [1])

   a) Dê uma definição rigorosa de $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ e use-a para provar que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

   b) Dê agora uma definição de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$. Mostre que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

   c) Qual a definição rigorosa de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$? Dê um exemplo de um tal limite.

8. (Exercício 4.3.8 de [1])

   a) Mostre que se uma função é contínua em $\mathbb{R}$ e nula em todos os racionais, então a função é identicamente nula.

b) Se f e g estão definidas em $\mathbb{R}$ e coincidem nos racionais, têm que coincidir em $\mathbb{R}$?

9. Calcule se existirem:

   a) $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$,
   b) $\lim_{x\to 0} \left[x \sin \frac{1}{x}\right]$,
   c) $\lim_{x\to +\infty} \left[x \sin \frac{1}{x}\right]$,
   d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x}$,
   e) $\lim_{x\to 0} \frac{\tanh \sqrt{x}}{x}$,
   f) $\lim_{x\to 0} \left[x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)\right]$.
   g) $\lim_{x\to +\infty} \left[x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)\right]$.

10. *(Exercício 4.3.9 de [1]) Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ e assuma que existe uma constante c tal que $0 < c < 1$ e

$$|f(x) - f(y)| \le c|x - y|$$

para todos x, $y \in \mathbb{R}$.

   a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}$.
   b) Escolha um ponto $y_1 \in \mathbb{R}$ e considere a sucessão

$$(y_1, f(y_1), f(f(y_1)), \ldots).$$

   Em geral, se $y_{n+1} = f(y_n)$ (para $n \in \mathbb{N}_1$), mostre que a sucessão (y_n) é de Cauchy. Podemos portanto definir $y = \lim y_n$.
   c) Mostre que y é um ponto fixo de f, i.e. $f(y) = y$, e que f não tem mais nenhum ponto fixo.
   d) Mostre que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a sucessão $(x, f(x), f(f(x)), \ldots)$ converge para y.

XI Continuidade e Limite (29/11-3/12/2004)

1. (Exercício III.12 de [4]) Prove que todo o polinómio de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

2. Prove que se $f : [0, 1] \to [0, 1]$ é contínua, então tem um ponto fixo.

3. Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e tem limites finitos no infinito, então é limitada.

4. (Exercício 3.29 de [5]) Sejam ϕ e $\psi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definidas por

$$\phi(x) = e^{-1/x^2}, \qquad \psi(x) = x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

   a) Estude ϕ e ψ quanto à continuidade.

b) Averigue se ϕ e ψ são prolongáveis por continuidade à origem.

c) Mostre que ϕ e ψ são limitadas.

5. Será limitada toda a função contínua em $\mathbb{R}$ satisfazendo $f(n) = 0$, para todo o n inteiro?

6. (Exercício III.16 de [4]) Supondo f contínua no intervalo semi-fechado $]a, b]$ *não* pode provar-se a existência de pelo menos um extremo de f nesse intervalo. Justifique.

7. (Exercício 3.40 de [5])

   a) Sendo $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ contínua no seu domínio, mostre que a função $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definida por

   $$\varphi(x) = g(1 - x^2)$$

   tem máximo e mínimo.

   b) Se, na alínea anterior, considerássemos g definida em $[0, +\infty[$ e contínua em $]0, +\infty[$, poderíamos continuar a garantir a existência de máximo e mínimo para φ? Justifique.

8. *(Exercício III.8 de [4]) Mostre que para que uma função monótona definida em $]a, b[$ possa prolongar-se por continuidade aos pontos a e b, é necessário e suficiente que seja limitada.

9. (Exercício IV.1 de [4]) Calcule as derivadas das funções:

   a) $x \mapsto \tan x - x$,

   b) $x \mapsto \frac{x+\cos x}{1-\sin x}$,

   c) $x \mapsto e^{\arctan x}$,

   d) $x \mapsto e^{\log^2 x}$,

   e) $x \mapsto x \sin x \tan x$,

   f) $x \mapsto x^2(1 + \log x)$,

   g) $x \mapsto x^x$.

   h) $x \mapsto (\log x)^x$,

XII Diferenciabilidade (6-10/12/2004)

1. Calcule pela definição as derivadas de

   a) $x \mapsto x$,

   b) $x \mapsto x^2$,

   c) $x \mapsto e^x$,

   d) $x \mapsto \sin x$.

2. (Exercício IV.3 de [4]) Determine o domínio de diferenciabilidade e calcule as derivadas de

a) $x \mapsto x|x|$,

b) $x \mapsto e^{-|x|}$,

c) $x \mapsto \log|x|$,

d) $x \mapsto e^{x-|x|}$,

e) $x \mapsto (-1)^{\mathcal{C}(x)}x$.

3. Considere a função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Mostre que ϕ é diferenciável.

b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de ϕ no ponto $(a, \phi(a))$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável. Calcule $(\arctan f(x) + f(\arctan x))'$.

5. Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞ e se anula numa sucessão de pontos estritamente decrescente e convergente para zero, então todas as derivadas de f se anulam na origem.

6. (Exercício 4.31 de [5]) Seja f uma função contínua num intervalo aberto que contenha os pontos 0 e 1 e tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 3 - \frac{1}{n^2}.$$

a) Calcule $f(0)$.

b) Prove que o contradomínio de f contém o intervalo $[2, 3]$.

c) Supondo agora, suplementarmente que f é indefinidamente diferenciável nalguma vizinhança da origem, determine $f^{(k)}(0)$ para todo o $k \in \mathbb{N}$. Indique se o ponto 0 é, ou não, ponto extremo de f.
Sugestão: Poderá ser-lhe útil considerar a função $\varphi(x) = f(x) + x^2 - 3$.

7. Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável e o seu gráfico cruza a recta $y = x$ em três pontos, então f'' tem pelo menos um zero.

8. Prove que a equação $3x^2 - e^x = 0$ tem exactamente três zeros.

9. Prove que se $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ é diferenciável e satisfaz $f(n) = (-1)^n$, para $n \in \mathbb{N}$, então a sua derivada não tem limite no infinito.

10. *Prove que se f é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, com segunda derivada limitada em módulo por c, e $f(0) = f'(0) = 0$, então para todo o $x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| \leq \frac{c}{2}|x|^2$.
Sugestão: Considere $g(x) = f(x) - \frac{c}{2}x^2$ e $h(x) = f(x) + \frac{c}{2}x^2$.

11. Prove que se f é de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e a equação $f(x) = x^2$ tem três soluções, sendo uma negativa, uma nula e outra positiva, então f' tem pelo menos um zero.

12. Use o Teorema de Lagrange para mostrar

a) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}}\ |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

b) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{0 \leq y \leq x}\ ny^{n-1}(x - y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x - y)$.

XIII Diferenciabilidade (13-17/12/2004)

1. (Exercício IV.12 de [4]) Calcule os limites:

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$,
   b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x+e^x)}{x}$,
   c) $\lim_{x\to 1}(\log x \cdot \log\log x)$,
   d) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$,
   e) $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{x}$,

2. (Exercício IV.9 de [4]) Mostre que, entre todos os rectângulos com um dado perímetro é o quadrado que tem área máxima, e que entre todos os rectângulos com uma dada área é o quadrado que tem o perímetro mínimo.

3. (Exercício IV.10 de [4]) Determine o cilindro de area total mínima, de entre todos os cilindros circulares rectos com um dado volume.

4. (Exercício IV.21 de [4]) Estude as funções definidas pelas expressões seguintes (no maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde cada uma delas faz sentido) e esboce os respectivos gráficos:

   a) $x^3 - 4x$,
   b) $\sqrt[5]{x}$,
   c) $x + 1/x$,
   d) $(x^3 - 8)/(x^2 - 9)$,
   e) $x\sqrt{1-x}$,
   f) $\log|\log x|$.

5. Esboce o gráfico da função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt[x]{x}$.

Sumários

Nas datas abaixo indicadas foram discutidos os exercícios das 13 fichas acima:

	Turmas 9101+13102 Quarta-feira, 8:00-10:00, C22 Turmas 13101+13102 Quarta-feira, 14:00-16:00, P12	Turma 13101 Sexta-feira 10:00-12:00, C9
Aula n.º 1	22/09/2004	24/09/2004
Aula n.º 2	29/09/2004	01/10/2004
Aula n.º 3	06/10/2004	08/10/2004
Aula n.º 4	13/10/2004	15/10/2004
Aula n.º 5	20/10/2004	22/10/2004
Aula n.º 6	27/10/2004	29/10/2004
Aula n.º 7	03/11/2004	05/11/2004
Aula n.º 8	10/11/2004	12/11/2004
Aula n.º 9	17/11/2004	19/11/2004
Aula n.º 10	24/11/2004	26/11/2004
Aula n.º 11	06/12/2004, 14:00-16:00, V126*	03/12/2004
Aula n.º 12	09/12/2004, 15:00-17:00, Pa1**	10/12/2004
Aula n.º 13	15/12/2004	17/12/2004

*Substitui a Aula do feriado 01/12/2004
**Substitui a Aula do feriado 08/12/2004

Referências

[1] **S. Abbott**, *Understanding Analysis,* Springer Undergraduate Texts in Mathematics, 2001.

[2] **T.M. Apostol**, *Mathematical Analysis,* Second edition. Addison Wesley, 1974.

[3] **J. Campos Ferreira**, Lições de Análise Real, IST, 2001.

[4] **J. Campos Ferreira**, *Introdução à Análise Matemática,* Fundação Gulbenkian, 6ª ed., 1995.

[5] **DMIST**, *Exercícios de Análise Matemática I e II,* IST Press, 2003.